Ex 14.12

$f : x \in [0;1] \longmapsto f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ est bien définie sur $[0;1]$, où $x+1 \neq 0$.

1°) f est définie et dérivable sur $[0;1]$ en tant que quotient d'exponentielle et de polynôme, avec $1+x \neq 0$.

$\forall x \in [0;1]$,
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left[e^x(1+x) - e^x \times 1\right]$$
$$= \frac{e^x}{(1+x)^2}(1+x-1)$$
$$= \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}$$

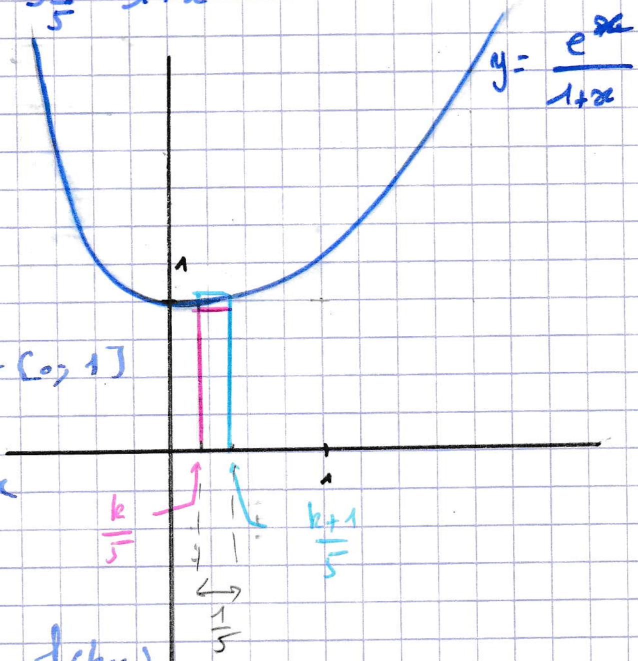
Or $\forall x \in [0;1]$, $(1+x)^2 > 0$ et $e^x > 0$.
Comme $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$,
donc f est croissante sur $[0;1]$. (strictement croissante sur $]0;1]$).

x	0		1
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$

2.a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$

Mq $\forall k \in [\![0;4]\!]$, $\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

$0 \leq k \leq 4$
$0 \leq \frac{k}{5} \leq \frac{4}{5} < 1$



$\forall k \in [\![0;4]\!]$,

$\forall x \in \left[\frac{k}{5} ; \frac{k+1}{5}\right]$,

$f\left(\frac{k}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ car $f \nearrow$ sur $[0;1]$

$$\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right)dx \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right)dx$$

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

(L'aire sous la courbe est comprise entre l'aire des rect. roses et celle des rect. bleus)

9/14

2.b. On a $\forall k \in [\![0;4]\!]$, $\frac{1}{5} f(\frac{k}{5}) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} f(\frac{k+1}{5})$

On somme sur k par k variant de 0 à 4 :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f(\frac{k}{5}) \leq \sum_{k=0}^{4} \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx}_{\text{Chasles}} \leq \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} f(\frac{k+1}{5})$$

$$\frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} f(\frac{k}{5}) \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} f(\frac{k+1}{5})$$

chgt indice

$$\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{5} f(\frac{k}{5})$$

$$\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{5} \Big(S_5 - \underbrace{f(\tfrac{0}{5})}_{=1} \Big)$$

$$\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{5} (S_5 - 1),$$ cqfd.

2.c. $S_4 = \sum_{k=0}^{4} f(\frac{k}{5}) \simeq 5,4587$

$S_5 = \sum_{k=0}^{5} f(\frac{k}{5}) \simeq 6,8178$

Donc $\frac{1}{5} S_4 \simeq 1,091$ par défaut et $\frac{1}{5}(S_5 - 1) \simeq 1,164$ par excès

d'où : $1,091 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1,164$

3.a. Soit $x \in [0;1]$ (alors $1+x \geq 1$ donc $1+x \neq 0$)

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{x(1+x)}{1+x} + \frac{x^2}{1+x}$$

$$= \frac{1+x - x - x^2 + x^2}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x}$$, d'où l'égalité demandée.

3.b) $$\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx = \int_0^1 e^x\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 e^x\left((1-x) + \frac{x^2}{1+x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x)e^x + \frac{x^2e^x}{1+x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)e^x\,dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2e^x}{1+x}\,dx}$$

$$= \int_0^1 (1-x)e^x\,dx + I \qquad \text{cqfd.}$$

3.c) $\int_0^1 (1-x)e^x\,dx$

On va faire une intégration par parties :

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = \left[u(x).v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

(vue démontré en TD). **I.P.P.**

On a ici : $u(x) = 1-x$; $u'(x) = -1$

$v'(x) = e^x$; $v(x) = e^x$

D'où $$\int_0^1 (1-x)e^x\,dx = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\times e^x\,dx$$

$$= \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= \underbrace{(1-1)e^1}_{0} - (1-0)\underbrace{e^0}_{1} + \left[e^x\right]_0^1$$

$$= 0 - 1 + (e^1 - e^0)$$

$$= -1 + e - 1$$

$$= \underline{e-2}$$

3.d) $1{,}091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx \leq 1{,}166$ (question 2.c)

et $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx - \int_0^1 (1-x)e^x\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx - (e-2)$

(d'après 3.b et 3.c), donc :

$1{,}091-(e-2) \leq I \leq 1{,}166-(e-2)$

Donc $0{,}37 \leq I \leq 0{,}45$.